# خلاصة الأشعة

| المفهوم | التعريف | ملاحظات و فوائد |
|---|---|---|
| تساوي شعاعين | يتساوى شعاعان إذا كان لهما نفس الجهة و المنحنى و الطول | يفيد في استبدال شعاع مكان شعاع مساوٍ له و يسمى الشعاع الممثل له. |
| الارتباط الخطي لشعاعين | $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ ( غير الصفريين ) مرتبطان خطياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد أي : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ( أو بتناسب مركبات الشعاعين ) | يفيد الارتباط الخطي لشعاعين في :<br>✓ برهان توازي المستقيمين ( AB ) , ( CD ) .<br>✓ برهان أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع ( في حالة $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ) أو( شبه منحرف $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ) (أو القول أن C هي صورة D وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$ عندما $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ) .<br>✓ برهان أن نقاط A , B , C على استقامة واحدة ( $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ) .<br>✓ برهان أن نقاط A , B , C تعين مستوياً ( أو مثلثاً ) ( ببرهان أن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً ) . |
| علاقة شال و العمليات | ✓ علاقة شال : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ .<br>✓ جمع شعاعين لهما نفس البداية هو : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ حيث D هو الرأس الرابع الذي يجعل الرباعي ABCD متوازي أضلاع .<br>✓ طرح شعاعين لهما نفس البداية هو : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ .<br>✓ قاعدة المتوسط في المثلث : في المثلث ABC إذا كانت I منتصف [ BC ] فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ . | ✓ تفيد شال في جمع أشعة تكون فيها نهاية كل شعاع بداية للآخر و في برهان صحة علاقة أو تعيين موضع نقطة أو تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لنقاط مثقلة مع ملاحظة إمكانية استخدامها بشكل معاكس ( $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}$ ) .<br>✓ يمكن استخدام قاعدة الجمع الثانية بشكل معاكس و ذلك باستبدال كل قطر لمتوازي الأضلاع بمجموع الضلعين اللتين تشتركان مع ذلك القطر بنفس الرأس . |
| الارتباط الخطي لثلاثة أشعة | إذا كان $\vec{u},\vec{v}$ شعاعين غير مرتبطين خطياً فإن الأشعة الثلاثة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا و فقط إذا وجد عددين حقيقيين α و β بحيث : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و في حالة مستوي فإن المستوي هو مجموعة النقاط M التي تحقق : $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ حيث A , B , C هي نقاط من المستوي لا تقع على استقامة واحدة و نسمي عندها $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ شعاعا توجيه المستوي . | ✓ كون الأشعة مرتبطة خطياً لا يعني ذلك بالضرورة أن المستقيمات الممثلة بها متوازية و لكن كل ثلاث مستقيمات متوازية تكون أشعة توجيهيا مرتبطة خطياً .<br>✓ كون الأشعة مرتبطة خطياً لا يعني أنها تقع في مستو واحد و لكن إذا كانت في مستو واحد فهي مرتبطة خطياً و إذا كانت الأشعة مرتبطة خطياً أمكن رسم ممثلات لها بحيث تقع في مستو واحد .<br>✓ إذا كان شعاعين مرتبطين خطياً فأي شعاع ثالث يجعل الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً .<br>✓ لارتباط ثلاثة أشعة **إحدى حالتين فقط** إما أن هناك اثنان منها مرتبطين خطياً فعندها تكون الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً أو أنه لا يوجد شعاعين منهم مرتبطين خطياً و عندها نكتب الثالث بدلالة الشعاعين الآخرين .<br>✓ يفيد الارتباط الخطي لثلاثة أشعة في برهان توازي ( أو وقوع ) مستقيم و مستوي أو في إيجاد معادلة مستوي . |
| المعلم | هو إعطاء نقطة O تسمى المبدأ و شعاعين **غير مرتبطين خطياً** مثل ( $\vec{i},\vec{j}$ ) في حالة مستوي و ثلاثة أشعة **غير مرتبطة خطياً** مثل ( $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ) ثم لتعيين إحداثيات نقطة مثل A نكتب $\overrightarrow{OA}$ بدلالة تلك الأشعة بالشكل : $\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ . | ✓ نسمي الأعداد x , y , z فاصلة – ترتيب – راقم و نسمي الثلاثية المرتبة ( x , y , z ) إحداثيات A في الفراغ .<br>✓ نسمي ( $\vec{i},\vec{j}$ ) أساس ذو بُعد ( 2 )،( $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ) أساس ذو بُعد (3) .<br>✓ الجملة ( $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ) تختلف عن الجملة : ( $O,\vec{j},\vec{i},\vec{k}$ ) مثلاً .<br>✓ يوجد ثلاثة أنواع للمعلم **معلم كيفي** لا يشترط فيه التعامد بين الأشعة أو تساوي الأطوال و **يفيد** في برهان صحة علاقات أو ارتباط خطي و في كل الحالات عدا الحالات التي لها علاقة **بالطول أو المساحة أو المحيط أو الجداء السلمي** و النوع الثاني **معلم متعامد** يفيد في إمكانية تحويله إلى معلم متجانس و النوع الثالث **معلم متجانس** تكون فيه الأشعة متعامدة و أطوالها متساوية و هو المعتمد في حساب الأطوال أو المساحات و المحيطات و الجداء السلمي ... و عند التعامل مع معلم يسمى الحل عندئذ الحل تحليلياً . |

# خلاصة الأشعة

<table>
<tr>
<td>الأشعة تحليليا</td>
<td colspan="2">
☒ مركبات شعاع : $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$ .<br>
☒ شرط الارتباط الخطي في المستوي : $X_{\vec{u}}Y_{\vec{v}}-X_{\vec{v}}Y_{\vec{u}}=0$ .<br>
☒ الجداء السلمي لشعاعين : $\vec{u}\,\vec{v}=x_1x_2+y_1.y_2+z_1.z_2$ .<br>
☒ شرط تعامد شعاعين : $x_1x_2+y_1.y_2+z_1.z_2=0$ .<br>
☒ المسافة بين نقطتين : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ .<br>
☒ إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة [AB] : $O'(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$ .<br>
☒ معادلة دائرة مركزها $(x_0,y_0)$ و نصف قطرها R : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ .<br>
☒ معادلة كرة مركزها $(x_0,y_0,z_0)$ و نصف قطرها R : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ .
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">مركز الأبعاد المتناسبة</td>
<td>
حالة نقطتين مثقلتين $(A,\alpha),(B,\beta)$<br>
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A , B إذا تحقق :<br>
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0},\alpha+\beta\neq0$
</td>
<td>
☒ الاختزال : أيا تكن M فإن : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ و الفائدة هي تمثيل الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ بـ $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ .<br>
☒ $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ و الفائدة إثبات أن A , B , G على استقامة واحدة أو لتعيين موضع G على المستقيم (AB) .<br>
☒ إذا كان (A , k) , (B , k) فإن G منتصف [AB] .<br>
☒ المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A ,1-t) , (B , t) $t\in IR$ .<br>
☒ القطعة المستقيمة [AB] هي مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A ,1-t) , (B , t) $t\in[0,1]$ .
</td>
</tr>
<tr>
<td>
ثلاث نقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$<br>
G مركز الأبعاد المتناسبة لـ A , B , C إذا تحقق :<br>
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$<br>
$\alpha+\beta+\gamma\neq0$
</td>
<td>
☒ الاختزال : أيا تكن M فإن : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$ و الفائدة كالسابق اختزال تمثيل الشعاع .<br>
☒ $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ و الفائدة إثبات أن النقاط A , B , C , G تقع في مستو واحد .<br>
☒ إذا كان (A , k) , (B , k) , (C, k) فإن G هي مركز ثقل المثلث ABC .<br>
☒ المستوي (ABC) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A , x) , (B , y) , (C , 1- x – y) .<br>
☒ إن G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(H,\alpha+\beta)$ و $(C,\gamma)$ حيث H م . أ . م لـ $(A,\alpha),(B,\beta)$ (بشرط $\alpha+\beta\neq0$)
</td>
</tr>
<tr>
<td>
أربع نقاط<br>
$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)$<br>
G مركز الأبعاد المتناسبة لـ A , B , C , D إذا تحقق :<br>
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$<br>
$\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq0$
</td>
<td>
☒ الاختزال : نفس ما سبق .<br>
☒ إذا كان (A , k) , (B , k) , (C , K) , (D , k) فإن G هي مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD .<br>
☒ إن G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,\alpha+\beta)$ و $(J,\gamma+\delta)$ حيث I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta)$ ($\alpha+\beta\neq0$) و J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,\gamma),(D,\delta)$ ($\gamma+\delta\neq0$) . و <u>هو أيضاً</u> مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D,\delta)$ و $(H,\alpha+\beta+\gamma)$ , ($\alpha+\beta+\gamma\neq0$) .
</td>
</tr>
<tr>
<td>الأسطوانة و المخروط</td>
<td colspan="2">
● معادلة الأسطوانة التي محورها $(o,\vec{i})$ مثلاً ونصف قطر قاعدتها R و مركزي قاعدتيها $(a,0,0),(b,0,0)$ (حيث $b<a$) هي : $y^2+z^2=R^2, b\le x\le a$ .<br>
● معادلة المخروط الذي محوره $(o,\vec{i})$ مثلاً ونصف قطر قاعدته R و ارتفاعه h هي :<br>
$y^2+z^2-\frac{R^2}{h^2}x^2=0, 0\le x\le h$ .
</td>
</tr>
</table>

# خلاصة الأشعة

## الجداء السلمي

- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

  $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\operatorname{Cos}\theta$

  $\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ **حيث** $\overrightarrow{AH}$ **المسقط القائم لـ** $\overrightarrow{AC}$ **على المستقيم ( AB ) أو على مستو يحوي ( AB ) .**
- **شرط تعامد** $\vec{u}$ **و** $\vec{v}$ **هو :** $x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 0$ .

## التمثيلات الوسيطية

- **معادلة مستو بمعرفة ناظم** $\vec{n}(a,b,c)$ **و نقطة** $A(x_0,y_0,z_0)$ **من المستوي هي :**

  $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ أو $ax+by+cz+d=0$ .
- **المعادلات الوسيطية لمستقيم بمعرفة شعاع التوجيه** $\vec{v}(a,b,c)$ **و نقطة** $A(x_0,y_0,z_0)$ **من المستقيم هي :**

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \qquad t \in IR \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- **المعادلات الوسيطية للقطعة المستقيمة [ AB ] حيث** $\overrightarrow{AB} = \vec{u}(a,b,c)$ **و** $A(x_0,y_0,z_0)$ **هي :**

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \qquad t \in [0,1] \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- **المعادلات الوسيطية لنصف المستقيم [AB) الذي مبدؤه** $A(x_0,y_0,z_0)$ **و يمر من B هي :**

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \qquad t \in [0,+\infty[ \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

## أوضاع

- المستقيمان إما متوازيان ( شعاعا التوجيه مرتبطان خطياً ) أو متقاطعان ( شعاعا التوجيه غير مرتبطان و لمعادلتي المستقيمين حل مشترك ) أو متخالفان ( شعاعا التوجيه غير مرتبطان خطياً و حل معادلتي المستقيمين مستحيل ) .
- المستويان إما متوازيان ( ناظميهما مرتبطان خطياً ) أو متعامدان ( $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$ ) أو متقاطعان بفصل مشترك ( ناظميهما غير مرتبطان خطياً ) .
- لمعرفة وضع ثلاثة مستويات نحل جملة معادلات المستويات و نميز الجملة مستحيلة الحل ( المستويات لا تشترك بأي نقطة و لا يعني ذلك بالضرورة أنها متوازية ) أو لها حل وحيد ( فهي تشترك بنقطة ) أو لها عدد غير منته من الحلول ( أي تشترك بفصل مشترك ) .
- المستقيم إما يوازي المستوي ( $\vec{n}\vec{v} = 0$ ) أو يعامده ( $\vec{n},\vec{v}$ مرتبطان خطياً ) أو يقطعه بنقطة ( و لإيجاد نقطة التقاطع نعوض جملة معادلات المستقيم في معادلة المستوي و نوجد قيمة الوسيط t ثم نوجد نقطة التقاطع ) .
- لدراسة تقاطع مستوي و كرة مركزها O و نصف قطرها R نوجد H المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي ثم نحسب OH و نميز : المستوي يمس الكرة في H ( عندما R = OH ) و المستوي يقطع الكرة وفق دائرة مركزها H و نصف قطرها $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$ ( عندما R > OH ) و المستوي لا يشترك مع الكرة بأي نقطة ( عندما R < OH ) .
- لدراسة تقاطع مستقيم و كرة نعوض جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول t و نميز للمعادلة حلين ( المستقيم يقطع الكرة ) للمعادلة حل مضاعف ( المستقيم يمس الكرة ) و المعادلة مستحيلة ( المستقيم لا يشترك مع الكرة بأي نقطة ) .

# خلاصة الأشعة

- مجموعة نقاط M في المستوي التي تحقق : $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}\right\|=r$ هي دائرة مركزها G و نصف قطرها : $\frac{r}{\alpha+\beta}$ .
- مجموعة النقاط M في الفراغ التي تحقق : $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}\right\|=r$ هي كرة مركزها G و نصف قطرها : $\frac{r}{\alpha+\beta+\gamma}$ .
- مجموعة نقاط M في المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ هي محور القطعة المستقيمة [ AB ] .
- مجموعة النقاط M في الفراغ التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [ AB ] .
- مجموعة نقاط M في المستوي التي تحقق : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي دائرة قطرها [ AB ] و في الفراغ هي كرة قطرها [ AB ]
- لإثبات وقوع أربع نقاط A , B , C , D في مستو واحد : ابحث عن شعاعين غير مرتبطين خطياً مثل $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ ثم تحقق من وجود $\alpha , \beta$ بحيث : $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ أو برهن أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الباقية أو اكتب معادلة المستوي ( ABC ) مثلاً ثم تحقق أن D تنتمي إلى ذلك المستوي .
- لإثبات تقاطع المستقيمين $d_1$ الذي شعاع توجيهه $\vec{u}$ و يمر من A و $d_2$ الذي شعاع توجيهه $\vec{v}$ و يمر من B أثبت أن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطياً و ( أن $d_1 , d_2$ يقعان في مستو واحد أي : تحقق من وجود $\alpha , \beta$ بحيث : $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ ) أو ( اكتب جملة المعادلات الوسيطية للمستقيمين بوسيطين مثل t , s ثم حل جملة المعادلات بالمجهولين t , s )
- لإثبات توازي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{v}$ و مستوي ( أثبت أن $\vec{n}\vec{v}=0$ حيث $\vec{n}$ ناظم المستوي ) أو ( أثبت أن شعاع توجيه المستقيم $\vec{v}$ و شعاعي توجيه المستوي $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطة خطياً أي : $\vec{v}=\alpha\vec{u_1}+\beta\vec{u_2}$ ) .
- لإنشاء معلم متجانس يكفي البحث عن معلم متعامد مثل $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ ثم وضع المعلم المتجانس بالشكل : $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{AB}=a\vec{i},\overrightarrow{AC}=b\vec{j},\overrightarrow{AD}=c\vec{k}$ و a , b , c هي أطوال AB , AC , AD على الترتيب .
- لإيجاد معادلة المستوي المحوري لـ [ AB ] نضع : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$ و $O'(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$ نقطة من المستوي و ترد الحالة إلى إيجاد معادلة مستوي بمعرفة ناظم و نقطة .
- لإيجاد معادلة مستوي بمعرفة شعاعا توجيهه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ و نقطة منه A نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ الذي يحقق المعادلتين : $\vec{n}\vec{u_1}=0,\vec{n}\vec{u_2}=0$ و بحل المعادلتين ( بثلاث مجاهيل و واحد منهم له قيمة اختيارية ) نحصل على مركبات الناظم و ترد الحالة إلى إيجاد معادلة مستوي بمعرفة ناظم و نقطة .
- لإيجاد معادلة مستوي يمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة A , B , C نجد أن الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ هما شعاعا توجيه المستوي المطلوب و ترد الحالة إلى سابقتها .
- لإيجاد المسقط القائم للنقطة D على المستوي P نكتب جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من D و الذي يقبل ناظم P شعاع توجيه له ثم نوجد نقطة تقاطع المستوي P و ذلك المستقيم و لتكن 'D و هي المسقط المطلوب ... أن 'DD يمثل بُعد النطة D عن المستوي P أيضاً كما يمكن إيجاد بُعد D عن المستوي P بالعلاقة : $dist(D,P)=\frac{\left|ax_D+by_D+cz_D+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ .
- لإيجاد المسقط القائم للنقطة D على المستقيم d نضع $D'(at+x_0,bt+y_0,ct+z_0)$ ( إحداثيات 'D هي جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم d ) ثم نوجد قيمة t من العلاقة المحققة : $\overrightarrow{DD'}\vec{u}=0$ حيث $\vec{u}$ شعاع توجيه d ثم نعوض قيمة t في 'D فتكون هي المسقط المطلوب ... إن 'DD هو بعد D عن المستقيم d ( كما يمكن حساب بُعد D عن d باختيار نقطة اختيارية من المستقيم d مثل 'D ثم حساب 'DD و جعله أصغر ما يمكن ).
- لإيجاد جملة المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر بنقطتين مثل A , B نضع شعاع توجيه المستقيم $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و ترد الحالة إلى الحالة المعروفة ( معرفة شعاع توجيه و نقطة )
- لإيجاد معادلة الفصل المشترك لمستويين $P_1 , P_2$ نحن أمام طريقتين الأولى هي الحل المشترك لمعادلتي المستويين و وضع الوسيط t بدلاً عن المجهول الزائد في حل المعادلتين و الطريقة الثانية بوضع قيمة اختيارية لمجهول مثل x = 0 مثلاً و حل معادلتي المستوي ثم x = 1 و حل معادلتي المستوي .. إن النقطتين الناتجتين هما نقطتان من الفصل المشترك و يمكن إيجاد المعادلات الوسيطية للفص للفصل المشترك بمعرفة نقطتين منه .
- لإيجاد H نقطة تلاقي الارتفاعات في مثلث ABC استفد من : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0,\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0,\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0$